

Ensayos

La medida como célula

del curso de matemática en las carreras de ingeniería

Resumen

En este trabajo se exponen algunas consideraciones sobre la enseñanza de la matemática en la ingeniería, en particular se fundamenta el concepto de medida como célula del curso de matemática en las Ciencias Técnicas, siguiendo las exigencias de N. G. Salmina sobre "Los procedimientos para construir la asignatura docente". Se exponen además otras ideas sobre la formación básica en matemáticas, en particular respecto al desarrollo del pensamiento algorítmico.

Como expresan los diversos autores, no existen fórmulas para determinar la célula de una disciplina, por lo que no me he propuesto expresar ideas acabadas, más bien son reflexiones para un debate enriquecedor sobre el tema que son el resultado de largas y profundas meditaciones sobre el significado didáctico de la célula para el caso de la Matemática Superior. Se trata pues de una aproximación inicial a los fundamentos lógico psicológicos de la estructuración del curso de matemática para ingenieros con el objetivo de lograr mayor eficiencia y calidad.

Abstract

This study presents some important reflections about the teaching of mathematics in engineering, and particularly, the concept of "measure" as the cell or essence of the mathematics course in Technical Sciences. This follows the requirements of N.G. Salmina about "The procedures to construct the teaching subject matter". Some other aspects concerned with basic formation in Mathematics, particularly with the development of thought related to algorithms are also included. As different authors have expressed, there are no formulas to determine the cell of a subject matter. That is why it is not my intention to express perfect arguments, but rather reflections, which are the result of long and deep meditations about the didactic significance of the cell in the case of Higher Mathematics. This is just a preliminary step towards the logical-psychological bases for the structuring of the mathematics course for engineers in order to achieve greater efficiency and quality.

Abstrait

Il s'agit de quelques considérations sur l'enseignement des mathématiques en ingénierie, et plus particulièrement fondées sur le concept de mesure comme cellule du cours de mathématiques en sciences techniques, selon les exigences de N. G. Salmina au sujet des "procédés d'élaboration de la matière à enseigner". De plus, nous présentons d'autres idées sur la formation de base en mathématiques, surtout au sujet du développement de la pensée algorithmique.

Selon divers auteurs, il n'existe pas de formules pour déterminer la cellule d'une discipline, je n'ai donc pas exprimé des idées finies, sinon plutôt des réflexions pour un débat enrichissant sur ce sujet, qui sont le résultat de longues et profondes méditations sur la signification didactique de la cellule pour le cas des mathématiques supérieures. Il s'agit d'une approche initiale des fondements logiques et psychologiques de la structuration du cours de mathématiques pour les ingénieurs avec comme objectif d'atteindre une plus grande efficacité et qualité.

Luis Manuel Alonso Aguila *

Introducción

La tarea de formación matemática en los estudiantes de Ciencias Técnicas resulta en extremo compleja, pues se trata de lograr para una amplia masa de educandos en un período relativamente pequeño de cuatro o cinco semestres, conocimientos, habilidades y valores que han sido el resultado de todo un proceso de desarrollo histórico y científico de la humanidad durante varios siglos y cuyos aportes principales lo han logrado verdaderos genios de esta ciencia.

Teniendo en cuenta las particularidades de la ciencia matemática, el hecho de haber surgido y desarrollarse como respuesta a las necesidades de la práctica social, su elevado nivel de abstracción, su lenguaje preciso y su poder de síntesis y de generalización, así como el hecho real de que no podemos prescindir de la matemática aunque ese sea nuestro deseo, obliga a plantearnos la tarea de búsqueda permanente de nuevos métodos que permitan cada vez un mayor dominio por la amplia masa de estudiantes.

En este trabajo se exponen algunas consideraciones sobre la enseñanza de la matemática en la ingeniería, en particular se fundamenta el concepto de medida como célula del curso de matemática para las Ciencias Técnicas, para lo cual se siguieron las consideraciones de N. G. Salmina sobre “Los procedimientos para construir la asignatura docente”. Se exponen además otras ideas sobre la formación básica en matemáticas para las carreras de ingeniería, en particular respecto al desarrollo del pensamiento algorítmico, tan necesario en estas carreras, y sin embargo no tan ampliamente tratado a partir de las potencialidades que ofrece el curso de matemática, si muchas ideas se combinan con los conocimientos que en materia de computación ya tienen los estudiantes.

El concepto de medida como célula

Al hablar de la célula de un sistema, como se refiere en [1], lo entendemos como el medio metodológico particular que contiene en sí las características estructurales y sustanciales y que permite realizar el

* *Dr. C Matemáticas y Profesor Titular,
Departamento de Matemática General,
Facultad de Ingeniería Industrial, Instituto
Superior Politécnico «José Antonio
Echeverría», ISPJAE Ciudad de la Habana
Cuba, lalons@ind.ispjae.edu.cu*

movimiento teórico en la asignatura investigada. En ese sentido toda la actividad que desarrollan nuestros educandos con la dirección de los profesores en el curso de matemática superior va dirigida hacia la medida de magnitudes y de relaciones entre magnitudes del tipo más diverso, por lo que tiene sentido entender el concepto de medida en un sentido general, es decir como la relación entre magnitudes escalares, vectoriales, aleatorias o no aleatorias que se asocia a un número real o complejo, a un vector de dimensión finita o infinita, al propio infinito, o a la existencia o no de solución en un problema dado, así como al número de soluciones. Aunque estos son los casos más comunes de medidas, se presentan otros de interés práctico asociados a intervalos. Por ejemplo los intervalos de confianza de algún parámetro desconocido de una distribución, se caracterizan por la longitud del intervalo y la probabilidad de confianza; la regla de las tres s expresa que casi todos los valores de una variable aleatoria normal están en un intervalo de radio $3s$ con centro en la media, y en las décimas de hipótesis ocurre algo similar. En este sentido la medida constituye una célula para la disciplina Matemática Superior, cumpliéndose las exigencias de Salmina dadas en [1] y que son las siguientes:

- a) Relación simple (elemental) del todo desarrollado.
- b) Relación general inherente al objeto en todas las etapas de su desarrollo y que refleja en sí la ley de la existencia del sistema.
- c) La relación que refleja la contradicción principal: La fuente del movimiento y el desarrollo en el todo.
- d) La relación que incluye la posibilidad de desarrollarse en sistema.

La relación que tiene carácter relativo y dependiente del sistema y que posee un prototipo real directo y que para el sujeto conocedor actúa como base organizadora del movimiento y punto de partida de la investigación.

Entre los rasgos de la medida podemos señalar los siguientes:

La medida exige una correcta interpretación así como la comprobación de sus posibles errores.

La medida tiene carácter relativo, ya que en dependencia del método utilizado y de los objetivos propuestos, puede ser satisfactoria o insatisfactoria.

La medida permite comparar, distinguir y facilitar las relaciones aparentemente inconexas.

Su carácter general se expresa en el hecho de que permite expresar en forma cuantitativa o cualitativa, relaciones entre magnitudes surgidas de problemas prácticos fundamentados en nociones intuitivas e interpretaciones geométricas y físicas.

La medida es la fuente del movimiento y el desarrollo porque los problemas principales a resolver en el curso de matemática pueden plantearse a través de preguntas como las siguientes: ¿Con qué exactitud o aproximación debemos tomar los valores de la variable independiente para obtener una exactitud o aproximación dada en la variable dependiente?. Esta pregunta que puede plantearse desde las primeras clases vinculada con el cálculo de límites y el análisis de la continuidad de funciones, resulta también un elemento clave para introducir los métodos numéricos. Al tratarse las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales o diferenciales, siempre está presente la siguiente pregunta:

¿Tiene o no tiene solución el sistema, y en caso de tener solución, cuántas soluciones existen?. Algo similar ocurre con otros conceptos, así por ejemplo si conocemos que el término n ésimo de una serie no tiende a cero aunque no se halla estimado el valor preciso, podemos asegurar que se trata de una serie divergente; si la derivada es diferente de cero, no existe un extremo en el punto, si es positiva se trata de una función creciente y si es negativa, de una función decreciente.

En caso de conocerse el valor exacto, este ofrece información adicional sobre el grado de crecimiento, es decir podemos conocer si se trata de un crecimiento rápido o lento. Incluso en los problemas de optimización deberá discutirse porqué son más valiosas las condiciones necesarias que las suficientes.

El carácter relativo de la medida puede evaluarse al comprobar si es válido aplicar ciertas reglas y leyes, obtenidas como resultado de la demostración de teoremas que sustentan la teoría que se estudia, es decir como parte de la comprobación de las hipótesis, y además, en problemas sencillos como por ejemplo el cálculo aproximado mediante la imprecisa fórmula del diferencial primero y el teorema del valor medio después para una aproximación más exacta, o la noción intuitiva de probabilidad de un suceso a través de la frecuencia primero y su estimación más precisa después con los teoremas límites.

La génesis del cálculo diferencial e integral está asociada con la extensión de la medida de alguna magnitud conocida a casos más generales. Así por ejemplo, la observación de que la tangente a una circunferencia puede definirse como un límite de rectas secantes, permite extender el concepto de tangente a una clase más amplia de funciones; y la observación de que tomando intervalos de tiempo cada vez más pequeños, las velocidades medias conducen a la velocidad instantánea, abonan el terreno para el desarrollo del curso de cálculo diferencial. Por

otro lado, el conocimiento de fórmulas para el cálculo de áreas de polígonos, permite extender el concepto de área a un círculo y a figuras más generales como base del curso de cálculo integral.

Si bien las ideas anteriores están asociadas a leyes dinámicas, para los fenómenos regidos por leyes estadísticas siempre estarán presentes las siguientes preguntas:

¿Cómo medir o cuantificar la posibilidad de ocurrencia de un suceso?, ¿cómo estimar el número alrededor del cual se agrupan los valores más probables de una variable aleatoria, y como estimar el grado de desviación de esos valores respecto a ese número?, ¿cómo estimar el grado de dependencia entre dos variables aleatorias?, ¿cómo se materializa la idea de que la acción conjunta de un gran número de factores casuales conduce a resultados que casi no dependen de la casualidad, es decir como cuantificar las regularidades estadísticas?. De la misma manera al introducir el método de los mínimos cuadrados y la varianza podemos preguntarnos ¿por qué tomar los cuadrados?.

Todos estos razonamientos nos permiten expresar que el concepto de medida según lo hemos definido, puede considerarse como célula de la disciplina Matemática Superior en las Ciencias Técnicas. Aceptarlo así tiene gran valor metodológico, ya que los errores más significativos en los estudiantes, están por un lado en no saber lo que buscan, y si lo saben, no ofrecer una respuesta satisfactoria de lo que necesitan medir. No siempre se educa en el principio de interpretar correctamente la solución dada a un problema, y en la coherencia y lógica según el contexto que se analiza.

La inclusión del enfoque algorítmico y de métodos numéricos durante todo el curso de matemática superior está estrechamente vinculada a la noción de medida como célula. Muchos de esos algoritmos y métodos numéricos poseen menor complejidad que otros aspectos tradicionalmente abordados en el curso como calcu-

lar una integral de superficie o trazar la gráfica de una función con extremos y asíntotas, y sólo requieren para implementarlos en algún lenguaje de programación, conocer las instrucciones de entrada y salida de datos, y el uso de los ciclos “if”, “for” y “while”. Así por ejemplo, al utilizar métodos de Runge-Kutta de diversos órdenes para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, se comprueba que en la medida que se incrementa el orden del método, la solución aproximada mejora. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Qué orden resulta satisfactorio en una clase dada de problemas?.

La eficiencia computacional, es decir aspectos sobre la universalidad del algoritmo, la velocidad de convergencia y la sencillez de la organización de los cálculos, deberán discutirse, pudiéndose en un algoritmo llegarse a debatir sobre la cantidad de operaciones aritméticas necesarias para un cálculo, lo que se expresa en tiempo de cómputo y memoria, aspectos que siempre deben optimizarse al usar computadoras. Deberá precisarse que los métodos numéricos no son una panacea para resolver todos los problemas, en ocasiones son más útiles los métodos analíticos o exactos, y además estos nos permiten muchas veces comprobar que el algoritmo implementado es correcto.

Aunque el enfoque axiomático no es característico de la enseñanza de la matemática en las ciencias técnicas, considero útil formalizar el concepto de medida, lo cual puede hacerse como parte del estudio de las integrales e introduciendo en el curso de probabilidades la axiomática de Kolmogorov.

En ocasiones; al discutirse estas ideas, algunos docentes expresan que no es posible pues el tiempo no alcanza para tanto. En realidad no se trata de buscar más tiempo, sino de darle una estructuración sistémica a la disciplina, donde estas ideas formen parte de la actividad diaria de cada clase.

El trabajo metodológico no debe limitarse sólo a estimar la célula. Deberán tenerse presente los criterios de optimalidad en la construcción de las asignaturas. En este sentido resulta conveniente introducir los conceptos propios de la Teoría de Probabilidades como probabilidad, densidad de probabilidad, función de distribución, esperanza matemática, desviación típica, coeficiente de correlación, etc. En forma paralela con los conceptos análogos de frecuencia, histograma, función de distribución empírica, media aritmética etc. De igual manera, considerar la utilización conjunta de la Teoría de Probabilidades y la computación, para resolver problemas en los que no intervienen factores aleatorios y en la modelación de fenómenos que por otras vías serían muy difíciles, costosos o imposibles de investigar.

Otro criterio de optimalidad está en dejar claro si los nuevos problemas que se abordan se basan en conceptos y principios de naturaleza esencialmente nueva para el estudiante, o simplemente son generalizaciones o interpretaciones de otro tipo que se obtienen de la información anterior. Estas ideas no deben quedar sólo en el claustro, resulta útil discutir las con los estudiantes sin necesidad de utilizar un lenguaje rebuscado.

Como expresan los diversos autores, no existen fórmulas generales que permitan determinar la célula de una disciplina, por lo que no me he propuesto expresar ideas acabadas, más bien son reflexiones para un debate enriquecedor sobre el tema, que son el resultado de largas y profundas meditaciones sobre el significado didáctico de la célula para el caso de la matemática superior. Se trata pues; de una aproximación inicial a los fundamentos lógico-psicológicos de la estructuración del curso de matemática para ingenieros con el objetivo de lograr mayor eficiencia y calidad.

Acerca de la formación básica en matemáticas

En las últimas décadas se ha producido una amplísima penetración de los métodos matemáticos en las más diversas ramas del conocimiento científico, conociéndose este proceso como matematización de las ciencias.

Ramas de la ciencia que hasta hace algunos años parecían estar divorciadas de la matemática, han encontrado en ella un modo adecuado de expresión cuantitativa de sus fenómenos. En la medicina, por ejemplo, se ha extendido el estudio del funcionamiento de órganos vitales como el corazón, pulmones, riñones etc., a partir de los trabajos del fisiólogo norteamericano Artur Gayton, el cual ha logrado describir dicho funcionamiento mediante ecuaciones diferenciales. Por otro lado, la propia matemática se enriquece no sólo de las ciencias tradicionales como la Física y la Mecánica; un ejemplo interesante relacionado con la influencia de la psicología en la matemática, puede verse en [3], donde el autor comprueba experimentalmente que cuando una persona observa un objeto, le presta mayor atención a los ángulos y esquinas que lo conforman que a los segmentos rectilíneos. El hecho de que los ángulos y esquinas son los que nos ofrecen mayor información acerca de la forma y dimensiones del objeto, ha servido en la actualidad al desarrollo de la Teoría sobre los Puntos Significativos de una Curva, de amplio uso en el campo del procesamiento de imágenes digitales y el reconocimiento de patrones de forma bidimensionales.

Para el caso de la enseñanza de las Ciencias Técnicas, el curso de matemática pertenece al ciclo de formación básica, que se imparte en los primeros semestres; pero no siempre se logra consenso al dise-

ñar los objetivos y contenidos de los programas de estudio, respecto a lo que se entiende por "formación básica", aunque se coincide que se trata de los conocimientos y habilidades primarios que permiten asimilar los conocimientos y habilidades de la especialidad con un nivel superior de integración en correspondencia con la época.

Con el objeto de ilustrar estas ideas en un tema, a continuación se exponen consideraciones de valor metodológico que deben tenerse en cuenta al estudiarse las Ecuaciones Diferenciales.

En este tema se deben abordar los siguientes aspectos:

1. Problemas de carácter físico, mecánico, químico y geométrico que conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.
2. Los problemas de existencia y unicidad de las soluciones.
3. Nociones de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y del control optimal.
4. Métodos analíticos de solución de ecuaciones diferenciales.
5. Métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales.

El primer aspecto puede abordarse desde el principio del curso con problemas sencillos que pueden plantearse al estudiar las derivadas y resolverse con el estudio de las integrales; en particular las ecuaciones con variables separadas y separables. Los ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales deben dejarse dentro del tema.

Sobre el segundo aspecto, no deben realizarse las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad, por ser estos muy voluminosos y apoyarse en ideas del análisis matemático que no son lo suficientemente desarrolladas en el curso; no obstante deben discutirse ejemplos donde se vea el incumplimiento de las con-

diciones generales de existencia, con lo cual se fortalece uno de los principios del curso, que consiste en desarrollar habilidades en el análisis de las condiciones en que es posible aplicar determinadas reglas y leyes.

Sobre el tercer aspecto, además de la noción de estabilidad de las soluciones, como concepto que significa que al establecer pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, se obtengan también pequeñas variaciones en la solución de la ecuación, es decir que no “reine el caos”, deben incluirse por su interés práctico, los conceptos de sistema controlable y de sistema observable.

La controlabilidad se asocia a la idea de llevar el sistema de un estado inicial conocido, hacia un estado final deseado y fijado previamente; y la observabilidad se vincula con el hecho de poder predecir unívocamente el estado inicial de un sistema, si durante un tiempo finito ha sido registrada la función de salida de dicho sistema. Resulta conveniente también abordar los conceptos de solución optimal, criterios de optimalidad, variables de estado, de control, trayectorias, así como las condiciones necesarias de optimalidad dadas por el Principio del Máximo de Pontriaguin.

Sobre el cuarto aspecto, se abordarán los métodos analíticos clásicos sin hacer énfasis en ejemplos artificiosos. Se utilizará el método de la transformada de Laplace con preferencia para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

En relación con los métodos numéricos, puede abordarse el método de Euler por su sencillez y relación con la interpretación geométrica de la derivada, al estudiarse este tema, desarrollándose después con detalle los métodos mejorado y modificado de Euler.

El tema que nos ocupa mantiene estrecho vínculo con la posibilidad de desarrollar la capacidad de mo-

delar; esto es cierto, pero la modelación no puede quedar solo en el marco de construir la ecuación diferencial; es necesario que tales modelos sean “buenos” según ciertos principios. Lo antes expuesto nos brinda una respuesta inicial sobre estas ideas de formación básica.

Conclusiones

En el trabajo se recoge un conjunto de consideraciones de valor metodológico sobre la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería, de interés tanto para los docentes que se ocupan de la enseñanza de esta ciencia, como para otros profesionales vinculados a ella. Se ha procurado destacar el papel formativo que ocupa la matemática, contrario al carácter eminentemente utilitario con que muchas veces se pretende introducir.

Sin negar la importancia que tiene el estudio en la ingeniería de muchas construcciones matemáticas debidamente formalizadas mediante definiciones y teoremas, en el trabajo se defiende el principio de aprovechar cualquier idea: intuitiva, geométrica o física por ingenua que parezca, para el desarrollo de la personalidad de los estudiantes **T**

Bibliografía

- 1- N..G. SALMINA Y OTROS
1984 “Análisis lógico-psicológico de los procedimientos para discutir la asignatura docente”. Educación Superior Contemporánea 3(47) 84.
- 2- COLECTIVOS DE AUTORES
1990, 1993 y 1998. Programas de la Disciplina Matemática Superior. I.T.M. “José Martí”.
- 3- ATTNEAVE F.
1954 “Some informational aspects of visual perception” Psychol. Rev. 61 pag. 183-193.